

Elementos Finitos de Orden Superior para Propagación de Ondas Sísmicas

Jonás D. De Basabe

División de Ciencias de la Tierra

CICESE

RESUMEN

En las últimas décadas se han realizado grandes avances en los métodos de elementos finitos, tanto prácticos como analíticos. Estos avances son relevantes para sus aplicaciones en sismología. Dos métodos en particular que han atraído la atención de investigadores en el área de sismología numérica y computacional son: el de elementos espectrales y el de Galerkin discontinuo, por las ventajas que ofrecen para discretizar un medio heterogéneo y obtener sismogramas sintéticos con un orden elevado de precisión. En este artículo se describen estos métodos, se presentan los principales resultados del análisis de precisión y estabilidad numérica y se muestran sismogramas sintéticos para el problema de Lamb. Con base en los resultados analíticos y numéricos, concluimos que los métodos de orden 4 ó superior tienen mínima dispersión y anisotropía numérica, por lo cual son ideales para propagaciones numéricas de gran escala. La razón de muestreo puede ser de hasta 4 ó 5 nodos por longitud de onda.

INTRODUCCION

En las últimas cinco décadas se ha investigado intensamente la aplicación de distintos métodos numéricos para la propagación de ondas sísmicas. La principal motivación de esto es el hecho de que no existen soluciones analíticas para modelos geofísicos de interés, por ejemplo, modelos con una distribución arbitraria de heterogeneidades o con topografía. La mayoría de los métodos numéricos para propagación de ondas que se han utilizado hasta ahora se pueden clasificar en alguna de las siguientes categorías:

1. Los que utilizan alguna aproximación asintótica de la ecuación de onda, como el método de trazado de rayos (Cervený, 2001; Madrid, 2008),

2. Los que aproximan las derivadas espaciales en la ecuación de onda a través de la transformada de Fourier, como el método pseudoespectral (Kosloff y Baysal, 1982; Fornberg, 1987),

3. Los que evalúan las derivadas espaciales y temporales de la ecuación de onda a través de series de Taylor truncadas, como el método de diferencias finitas con mallado simple (Alterman y Karal, 1968; Alford et al., 1974; Kelly et al., 1976) o el de diferencias finitas con mallado intercalado (Madariaga, 1976; Virieux, 1984, 1986), y

4. Los que discretizan alguna forma débil de la ecuación de onda, como el método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés) (Lysmer y Drake, 1972; Smith, 1975; Marfurt, 1984) o el de volumen finito (Dormy y Tarantola, 1995; Dumbser et al., 2007a).

Describir los méritos y limitaciones de cada uno de estos métodos queda fuera del alcance de los objetivos de este artículo. Para una descripción de todos estos métodos, ver Carcione et al. (2002). Basta decir que los métodos basados en la ecuación de onda, como el pseudoespectral, el de diferencias finitas y el de elementos finitos, tienen la ventaja de que incluyen en las simulaciones las ondas directas, reflejadas (incluyendo reflexiones múltiples), transmitidas, convertidas, refractadas, difractadas y superficiales. Asimismo, los métodos que utilizan directamente la ecuación de onda, como los de diferencias finitas y elementos finitos, ofrecen mayor flexibilidad para incluir heterogeneidades en el modelo y para incorporar cualquier tipo de condiciones de frontera. En particular, el FEM ofrece la mayor flexibilidad para utilizar discretizaciones que se apegan a la topografía y a las discontinuidades de los parámetros del modelo físico.

En este artículo enfocaremos nuestra atención en los FEM, y en particular en los de orden superior. Aunque los FEM han sido utilizados en sismología desde finales de los años sesenta (Chopra et al., 1969), la popularidad de este tipo de métodos fue en un principio muy limitada debido a que las versiones propuestas (Lysmer y Drake, 1972; Smith, 1975) tenían una precisión limitada y consumían considerablemente

más recursos computacionales que las implementaciones de diferencias finitas. La precisión de estos métodos ha sido estudiada en Mullen y Belytschko (1982) y en Marfurt (1984) en función de su dispersión numérica. Mullen y Belytschko (1982) estudiaron la dispersión numérica del FEM con diferentes tipos de elementos y concluyeron que los rectangulares introducen un mínimo de dispersión. Por su parte, Marfurt (1984) comparó el FEM con el de diferencias finitas y concluyó que el error por dispersión numérica de ambos métodos es comparable. Sin embargo, en el FEM es necesario obtener la inversa de una matriz, conocida como la matriz de masa, en cada paso de las iteraciones, para avanzar el sistema en la dimensión temporal. Este autor propuso diferentes estrategias para superar estas limitaciones, por ejemplo resolver el sistema en el dominio de la frecuencia, utilizar una matriz de masa diagonalizada o una combinación de las matrices de masa consistente y diagonalizada, pero los resultados no fueron alentadores. En una continuación de este análisis (Marfurt, 1990) también consideró el efecto en la dispersión numérica que resulta de utilizar polinomios de orden superior para las aproximaciones y concluyó que esto introduciría ondas espurias que contaminarían aun más los resultados. Por otro lado, la popularidad de los métodos de diferencias finitas se incrementaba por la llegada del método de mallado intercalado (Virieux, 1984, 1986; Levander, 1988), el cual reduce drásticamente la dispersión numérica (Moczo et al., 2000).

A pesar de todo esto, la flexibilidad del FEM para discretizar geometrías complicadas siguió atrayendo a investigadores en el área de sismología de terremotos. Por ejemplo, Bao et al. (1998) realizaron una

implementación a gran escala de este método para simular eventos sísmicos en el sur de California y evaluar el riesgo en áreas urbanas. En su implementación usaron una matriz de masa diagonalizada para evadir el costo computacional de calcular su inversa, y controlaron el error asociado a la dispersión numérica utilizando entre 10 y 20 elementos por longitud de onda.

En la década de los noventa hubo avances importantes en el desarrollo del FEM que permitieron que el método fuera de nuevo competitivo con el ubicuo método de diferencias finitas, superándolo en precisión y con una eficiencia computacional comparable. Dichos avances se presentaron en dos frentes; por un lado, se desarrollaron técnicas para diagonalizar la matriz de masa, conocidas como técnicas de acumulación de masa, que no comprometen la precisión (Cohen, 2002). Por otro lado, se empezaron a utilizar polinomios de orden superior, inspirados en el método pseudoespectral, para reducir la dispersión y anisotropía numérica (Cohen, 2002). Las técnicas de acumulación de masa están basadas en el uso de los mismos nodos para la cuadratura numérica y para los nodos que definen los polinomios de aproximación dentro de los elementos; los más comunes son los de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL), pero existen otras opciones dependiendo del método particular de elementos finitos. Como se mencionó anteriormente, el uso de polinomios de orden superior gozó de escasa popularidad, debido en parte a que se creía que introducían errores numéricos, al basarse en el análisis preliminar de Marfurt (1990). Adicionalmente, hay un costo computacional considerable siempre que la proporción de elementos diferentes de cero en la matriz de masa es

proporcional al orden de los polinomios, de tal manera que el costo computacional para almacenar e invertir esta matriz aumenta rápidamente. Estas limitaciones fueron superadas utilizando los nodos y técnicas de cuadratura mencionadas arriba; asimismo, se ha demostrado que, al contrario de lo que señalaban los análisis preliminares, los polinomios de orden superior reducen la dispersión y anisotropía numérica (ver la sección 4 para más detalles).

En este artículo enfocaremos nuestra atención en dos métodos que se han vuelto muy populares en la literatura y que combinan las características mencionadas anteriormente, es decir, que utilizan polinomios de orden superior y una matriz de masa diagonal. Estos métodos son el de elementos espectrales y el de Galerkin discontinuo. En las siguientes dos secciones se describen cada uno de estos métodos. En la sección 4 se describe su dispersión y estabilidad numérica, y posteriormente se comparan los resultados de aplicar estos métodos al problema de Lamb (Lamb, 1904).

ELEMENTOS ESPECTRALES

El Método de Elementos Espectrales (SEM, por sus siglas en Inglés), originalmente desarrollado para dinámica de fluidos (Patera, 1984), ha sido aplicado exitosamente para la ecuación de onda. Ha logrado superar las limitaciones de eficiencia, ofreciendo una mayor precisión que el método de diferencias finitas y una mayor flexibilidad geométrica. Este método fue utilizado originalmente para la ecuación de onda acústica por Seriani y Priolo (1994), quienes utilizaron los nodos

de Gauss-Lobatto-Chebyshev (GLC), y por Tordjman et al. (1994) y Tordjman(1995), quienes utilizaron los nodos de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL). El método fue utilizado para discretizar la ecuación de onda elástica por Komatitsch y Vilotte (1998), con lo cual se incrementó su popularidad rápidamente dentro de la comunidad sismológica (Komatitsch y Tromp, 1999, 2002a, b; Priolo, 2001; Komatitsch et al., 2002, 2004, 2005; Madec et al., 2009; Chaljub et al., 2007). Este método también se ha utilizado para problemas en sismología global y regional, arrojando resultados notablemente cercanos a los datos empíricos (Komatitsch et al., 2002, 2004).

La principal característica de SEM es que utiliza polinomios de orden superior para representar el campo de onda, con la ventaja de que se puede utilizar una razón de muestreo muy baja de entre 4 y 5 nodos por longitud de onda. La matriz de masa se puede diagonalizar usando los nodos de GLL y las reglas de cuadratura correspondientes. Esta estrategia es equivalente a la técnica de concentración de masa, pero con la ventaja de que no se sacrifica la precisión.

Este método, al igual que la versión clásica del FEM, está basado en la forma débil de la ecuación de onda, la cual se desarrolla a continuación. El modelo físico para la propagación de ondas elásticas está basado en la ecuación del movimiento, dada por (usando la notación de Einstein) Aki y Richards (2002)

$$\rho \partial_{tt} u_i = \sigma_{ij,j} - m_{ij,j} - f_i \quad \text{en} \quad \Omega \times (0, T] \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (1)$$

donde d son las dimensiones (2 ó 3), $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es el dominio en el espacio,

$(0, T]$ es el dominio en el tiempo, u_i es el vector de desplazamiento, σ_{ij} es el tensor de esfuerzo, y la fuente está dada por el tensor de momento m_{ij} y el vector de fuerzas f_i . En la ecuación anterior se utiliza la notación abreviada $u_{k,l} = \partial u_k / \partial x_l$. El tensor de esfuerzo se puede escribir en función del desplazamiento por medio de la ley de Hooke, la cual está dada en un medio elástico e isotrópico por

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (2)$$

donde λ y μ son los parámetros de Lamé, los cuales pueden ser funciones de las variables espaciales en un medio heterogéneo, y δ_{ij} es la delta de Kronecker. Sustituyendo la ley de Hooke en la ecuación de movimiento se obtiene la ecuación de onda elástica:

$$\begin{aligned} \rho \partial_{tt} u_i - (\lambda u_{j,j})_{,i} - (\mu(u_{i,j} + u_{j,i}))_{,j} &= m_{ij,j} + f_i && \text{en } \Omega \\ u_i &= 0 && \text{en } \Gamma_D \\ \lambda u_{k,k} n_i + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j &= 0 && \text{en } \Gamma_N \\ u_i = \partial_t u_i &= 0 && \text{para } t = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\partial\Omega$, es la frontera de Ω , y $n_i, i = 1, \dots, d$, es un vector unitario ortogonal a $\partial\Omega$. La forma débil de la ecuación de onda elástica se obtiene al multiplicar la ecuación (3) por un vector arbitrario \mathbf{v} , integrar sobre Ω y aplicar el teorema de Gauss, para obtener

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\lambda u_{i,i} v_{j,j} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) v_{i,j}) \, dx \, dz \\ + \partial_{tt} \int_{\Omega} \rho u_i v_i \, dx \, dz = \int_{\Omega} (m_{ij,j} + f_i) v_i \, dx \, dz, \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}^C = \{\boldsymbol{\varphi} \mid \int_{\Omega} (|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2) < \infty, \quad \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$$

Observar que el espacio vectorial \mathbf{X}^C es un espacio de Sobolev de primer orden en el cual se encuentra la solución débil. Para

discretizar esta ecuación en 2D es necesario introducir un subespacio de \mathbf{X}^C de dimensiones finitas $\mathbf{X}_h^C = X_h^C \times X_h^C \subset \mathbf{X}^C$ donde $X_h^C = \text{gen}\{\phi_i\}_{i=1}^n$. Las funciones $\phi_i = \phi_i(x, z)$, conocidas como funciones base, se definen utilizando la partición del dominio Ω en subdominios, llamados elementos, y los nodos dentro de los elementos. Sustituyendo u por la aproximación $\mathbf{u}_h \in \mathbf{X}_h^C$ dada por la siguiente combinación lineal

$$\mathbf{u}_h(x, z, t) = (U_j^x(t)\phi_j(x, z), U_j^z(t)\phi_j(x, z))^T \quad (5)$$

donde U_j^x y U_j^z son los coeficientes de las aproximaciones de las componentes horizontal y vertical del vector de desplazamientos, y sustituyendo $\mathbf{v} = (\phi_i, 0)^T$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$M_{ij} \partial_{tt} U_j^x + K_{ij}^1 U_j^x + K_{ij}^2 U_j^z = F_i^x \quad (6)$$

De manera similar, sustituyendo $\mathbf{v} = (0, \phi_i)^T$ se obtiene

$$M_{ij} \partial_{tt} U_j^z + K_{ij}^3 U_j^x + K_{ij}^4 U_j^z = F_i^z \quad (7)$$

donde las matrices en las ecuaciones (6) y (7) están dadas por

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \rho \phi_i \phi_j \, dx \, dz, \quad (8)$$

$$K_{ij}^1 = \int_{\Omega} ((\lambda + 2\mu)\phi_{i,x}\phi_{j,x} + \mu\phi_{i,z}\phi_{j,z}) \, dx \, dz, \quad (9)$$

$$K_{ij}^2 = \int_{\Omega} (\lambda\phi_{i,x}\phi_{j,z} + \mu\phi_{i,z}\phi_{j,x}) \, dx \, dz, \quad (10)$$

$$K_{ij}^3 = \int_{\Omega} (\lambda\phi_{i,z}\phi_{j,x} + \mu\phi_{i,x}\phi_{j,z}) \, dx \, dz, \quad (11)$$

$$K_{ij}^4 = \int_{\Omega} ((\lambda + 2\mu)\phi_{i,z}\phi_{j,z} + \mu\phi_{i,x}\phi_{j,x}) \, dx \, dz, \quad (12)$$

$$F_i^x = \int_{\Omega} f_x \phi_i \, dx \, dz, \quad (13)$$

$$F_i^z = \int_{\Omega} f_z \phi_i \, dx \, dz, \quad (14)$$

y f_x y f_z son las componentes en x y z de f . Los coeficientes U_i^x y U_i^z se pueden obtener de las ecuaciones (6) y (7) utilizando un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, como los de diferencias finitas, Newmark, Runge-Kutta o Lax-Wendroff.

Galerkin Discontinuo

El Método de Galerkin Discontinuo (DGM, por sus siglas en Inglés) fue originalmente propuesto por Reed y Hill (1973) para solucionar la ecuación hiperbólica de transporte de neutrones. La estrategia general para resolver ecuaciones diferenciales hiperbólicas utilizando la forma de primer orden con el DGM fue desarrollada en una serie de artículos por Cockburn y sus colaboradores, en Cockburn y Shu (1989); Cockburn et al. (1989, 1990) y Cockburn y (1998). En estos artículos, ellos proponen discretizar la ecuación diferencial en el espacio con una formulación basada en flujos y en el tiempo usando métodos de Runge-Kutta. Como regla general, el orden del método de Runge-Kutta debe de ser el mismo que el de la discretización en el espacio.

En el contexto de propagación de ondas sísmicas, recientemente se ha propuesto sustituir el método de Runge-Kutta por la estrategia ADER para avanzar el sistema en el tiempo en: Dumbser y Munz (2006); Käser y Dumbser (2006); Dumbser y Käser (2006); Kaser et al. (2007a,b); de la Puente et al. (2007); Dumbser et al. (2007a, b). Esta estrategia está basada en series de Taylor en la variable temporal, las cuales están truncadas para obtener la misma precisión en tiempo que en el espacio. Las derivadas de orden superior se sustituyen

por derivadas espaciales utilizando el teorema de Cauchy-Kovalewski. A este método también se le conoce como el método de Lax-Wendroff (Lax y Wendroff, 1964). Los métodos mencionados arriba utilizan una forma de primer orden de la ecuación de onda en velocidad y esfuerzo. Otros métodos de Galerkin discontinuo que se han propuesto para propagación de ondas son el simétrico de penalización interior (Grote et al., 2006) y el no-simétrico de penalización interior (Riviere y Wheeler, 2001).

En este artículo enfocaremos nuestra atención en el DGM de penalización interior (IP-DGM), porque tiene la ventaja de que utiliza menos grados de libertad en cada nodo, pues se puede utilizar con la ecuación de onda en función del desplazamiento (ecuación (3)). Este método está basado en la siguiente forma débil de la ecuación de onda:

Encontrar

$$\mathbf{u} \in \mathbf{X}^D = \{\varphi | \varphi \in \mathbf{H}^1(E) \forall E \in \Omega_h, \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$$

tal que, para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{X}^D$,

$$\sum_{E \in \Omega_h} ((\rho \partial_{tt} \mathbf{u}, \mathbf{v})_E + \mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \sum_{\gamma \in \Gamma_h} \mathbf{J}_\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}; S, R) = \sum_{E \in \Omega_h} (\mathbf{f}, \mathbf{v})_E \quad (15)$$

donde

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_E = \int_E u_i v_i \, dx \, dz, \quad (16)$$

$$\mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_E (\lambda u_{i,i} v_{j,j} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) v_{i,j}) \, dx \, dz, \quad (17)$$

$$\mathbf{J}_\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}; S, R) = - \int_\gamma \{\tau_i(\mathbf{u})\} [v_i] \, d\gamma + S \int_\gamma \{\tau_i(\mathbf{v})\} [u_i] \, d\gamma + R \int_\gamma \{\lambda + 2\mu\} [u_i] [v_i] \, d\gamma, \quad (18)$$

y τ_i es el vector de tracción, el cual está

dado en un medio isotrópico por

$$\tau_i(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j = \lambda u_{k,k} n_i + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j. \quad (19)$$

El parámetro R en la ecuación (18) es la penalización y S es un parámetro que toma los valores de 0, 1 ó -1 dependiendo de la forma particular del IP-DGM: $S = 0$ para el Galerkin incompleto con penalización interior (IIPG) (Dawson et al., 2004), $S = -1$ para el Galerkin simétrico con penalización interior (SIPG) (Darlow, 1980; Grote et al., 2006) y $S = 1$ para el Galerkin no simétrico con penalización interior (NIPG) (Riviere et al., 1999, 2001).

De nuevo, como en el caso de SEM, introducimos un espacio finito $\mathbf{X}_h^D = X_h^D \times X_h^D \subset \mathbf{X}^D$, y sustituimos en la ecuación (15) las funciones \mathbf{u} y \mathbf{v} por combinaciones lineales de las funciones base del espacio finito para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias como el de las ecuaciones (6) y (7), pero con las siguientes matrices:

$$M_{ij} = \sum_{E \in \Omega_h} (\rho \varphi_i, \varphi_j)_E \quad (20)$$

$$K_{ij}^1 = \sum_{E \in \Omega_h} \mathbf{B}_E((\varphi_i, 0)^T, (\varphi_j, 0)^T) + \sum_{\gamma \in \Gamma_h} \mathbf{J}_\gamma((\varphi_i, 0)^T, (\varphi_j, 0)^T) \quad (21)$$

$$K_{ij}^2 = \sum_{E \in \Omega_h} \mathbf{B}_E((0, \varphi_i)^T, (0, \varphi_j)^T) + \sum_{\gamma \in \Gamma_h} \mathbf{J}_\gamma((0, \varphi_i)^T, (0, \varphi_j)^T) \quad (22)$$

$$K_{ij}^3 = \sum_{E \in \Omega_h} \mathbf{B}_E((\varphi_i, 0)^T, (0, \varphi_j)^T) + \sum_{\gamma \in \Gamma_h} \mathbf{J}_\gamma((\varphi_i, 0)^T, (0, \varphi_j)^T) \quad (23)$$

$$K_{ij}^4 = \sum_{E \in \Omega_h} \mathbf{B}_E((0, \varphi_i)^T, (0, \varphi_j)^T) + \sum_{\gamma \in \Gamma_h} \mathbf{J}_\gamma((0, \varphi_i)^T, (0, \varphi_j)^T) \quad (24)$$

$$F_i^x = \sum_{E \in \Omega_h} (f_x, \varphi_i)_E, \quad (25)$$

$$F_i^z = \sum_{E \in \Omega_h} (f_z, \varphi_i)_E. \quad (26)$$

Dispersión y Estabilidad Numérica

Los análisis de dispersión y estabilidad numérica son herramientas fundamentales que evalúan la aplicabilidad de los métodos numéricos para propagación de ondas y que ayudan a determinar los parámetros necesarios para realizar simulaciones, específicamente, incrementos en espacio y tiempo. Al analizar la dispersión numérica se busca obtener un criterio para determinar el tamaño de los incrementos en el espacio de tal manera que el error sea mínimo, y al analizar la estabilidad se busca obtener un rango para el incremento en el tiempo dentro del cual el método sea estable, es decir, dentro del cual la magnitud del campo de onda esté acotada.

La dispersión numérica es un tipo de error que se comporta de una manera similar a la dispersión física. Este fenómeno se presenta debido a que las ondas con altas frecuencias se transportan a una velocidad diferente que las de bajas frecuencias, por lo que el frente de onda se dispersa. En la práctica, los resultados numéricos pueden parecer cualitativamente correctos, pero los tiempos de arribo pueden estar adelantados o atrasados, y las amplitudes y formas de onda también pueden estar distorsionadas. Para evitar que los resultados se vean afectados por este tipo de error es necesario determinar cuidadosamente el número de nodos por longitud de onda, de tal manera que la dispersión sea mínima para las frecuencias de interés.

En cuanto a la estabilidad numérica, es importante resaltar que la gran mayoría de los métodos que se utilizan en Sismología para discretizar las derivadas en el tiempo son condicionalmente estables. Esto

significa que existe un rango restringido dentro del cual se puede seleccionar el incremento en el tiempo. De otra manera las amplitudes del campo de onda se incrementarían indefinidamente. Dado que por lo general las cotas impuestas por los criterios de estabilidad son más restrictivas que las impuestas por criterios de precisión, normalmente se escogen los incrementos en el tiempo más grandes posibles que permite el criterio de estabilidad. Las condiciones de estabilidad se expresan por lo general como una condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), la cual es una desigualdad que acota el incremento en el tiempo con una constante por el incremento en el espacio dividido por la velocidad, donde la constante depende del método numérico en cuestión (Courant et al., 1967).

La precisión de SEM para el caso acústico ha sido estudiada por varios autores, por ejemplo Seriani y Priolo (1994), Mulder (1999), Cohen (2002), Ainsworth (2004a) y De Basabe y Sen (2007). La principal conclusión a la que llegaron estos autores es que el método arroja una precisión aceptable utilizando únicamente 4.5 nodos por longitud de onda en promedio y polinomios de orden cuatro o superior. Esta es una gran ventaja si lo comparamos, por ejemplo, con el método de orden 1 ó con los métodos de diferencias finitas con mallado intercalado, que necesitan por lo menos 10 nodos por longitud de onda, o con el de diferencias finitas con mallado estándar, que requiere más de 15 nodos por longitud de onda. Además, en todos estos artículos se enfatiza la ventaja de utilizar polinomios de orden superior, ya que tienen menos dispersión y anisotropía numérica.

Por otro lado, el caso elástico ha sido estudiado por De Basabe y Sen (2007). Las conclusiones de estos autores fueron consistentes con las mencionadas para el caso acústico. Además, observaron que este método es superconvergente al incrementar el orden polinomial de las funciones base y que la anisotropía numérica es nula al usar polinomios de orden tres o superior. En la figura 1 se encuentran graficados los errores atribuibles a la dispersión numérica de SEM contra el logaritmo de la razón de muestreo δ utilizando polinomios de orden 1 hasta 4 ($k=1,\dots,4$). La pendiente de las rectas indica el orden de convergencia del método. De esta gráfica es posible concluir que el orden de convergencia de SEM es aproximadamente $2k$. Dado que el orden de convergencia esperada es k , se dice que este método tiene la propiedad de superconvergencia. La figura 2 muestra la anisotropía numérica de SEM de orden 2 a 4, donde se encuentra graficada la dispersión en función del ángulo entre la malla y el ángulo de incidencia. Para poder visualizar la anisotropía numérica, en la gráfica se utilizó una razón de las velocidades de la onda P sobre la onda S de $\alpha/\beta = 10$ (donde α y β son las velocidad de las ondas P y S respectivamente), una razón de muestreo de $\delta=0.2$ (5 nodos por longitud de onda), y una propagación de 200 longitudes de onda. En esta gráfica, la dispersión está normalizada, por lo tanto el círculo con radio 1 representa la ausencia de dispersión; tal es el caso de los métodos de orden 3 y 4. El método de segundo orden muestra una significativa anisotropía numérica asociada a la dispersión, con un error de hasta 50% a los 30° y 60° , mientras que para las ondas que se propagan paralelas a los ejes (0° y 90°) la dispersión es mínima. Para más detalles

sobre las figuras 1 y 2 ver De Basabe et al.(2008).

La estabilidad de SEM en los casos acústico y elástico utilizando el método clásico de diferencias finitas y los de Lax-Wendroff de orden superior ha sido estudiada por De Basabe y Sen (2010). En ese artículo se utilizó el método de Euler para obtener condiciones de CFL, y se muestran condiciones necesarias y suficientes de estabilidad hasta orden 10 en espacio y tiempo. Como se mencionó anteriormente, las condiciones de CFL se expresan como una desigualdad de la forma

$$\Delta t \leq C \frac{h}{\alpha}, \quad (27)$$

donde Δt es el incremento en el tiempo, α es la velocidad de la onda P, h es el tamaño de los elementos, y C es una constante que depende únicamente de los métodos numéricos en cuestión. Los valores de C para SEM de orden 1 a 10 utilizando el método clásico de diferencias finitas para discretizar las derivadas temporales se muestran en la tabla 1 para el caso acústico y en la tabla 3 para el caso elástico. Muchas veces las condiciones de estabilidad se muestran utilizando el incremento mínimo en el espacio Δx en lugar del tamaño de los elementos h , de la siguiente manera:

$$\Delta t \leq C' \frac{\Delta x}{\alpha}. \quad (28)$$

Las constantes C' de la ecuación (28) se muestran en las tablas 2 y 4 para los casos acústico y elástico respectivamente. Al utilizar el incremento mínimo en lugar del tamaño de los elementos se observa que las constantes se acercan asintóticamente a los valores de 0.607 y 0.7 para los casos acústico y elástico respectivamente.

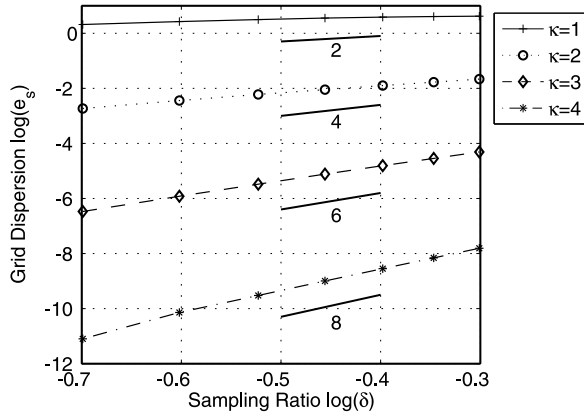


Figura 1. Error por dispersión numérica de SEM de orden 1 a 4 en el caso elástico (De Basabe et al., 2008)

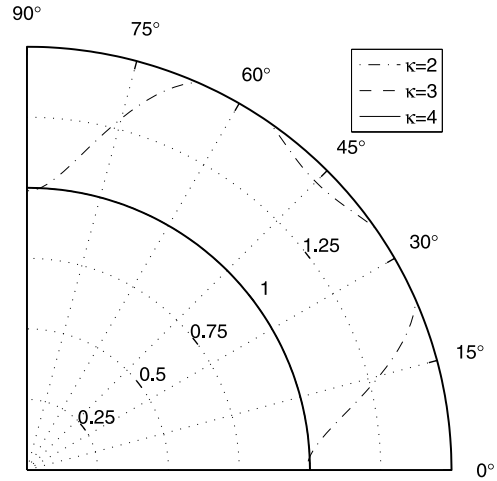


Figura 2. Anisotropía numérica de SEM de orden 2 a 4 en el caso elástico para una propagación de 200 longitudes de onda (De Basabe et al., 2008)

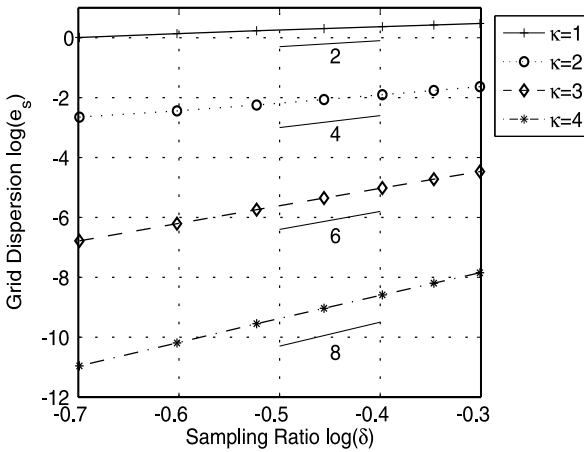


Figura 3. Error por dispersión numérica de la versión SIPG de DGM de orden 1 a 4 en el caso elástico (De Basabe et al., 2008).

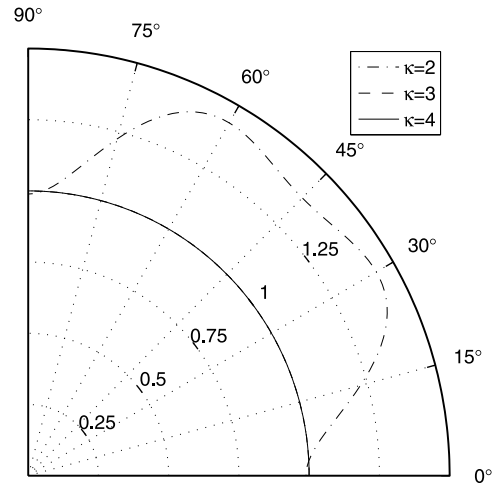


Figure 4. Anisotropía numérica de la versión SIPG de DGM de orden 2 a 4 en el caso elástico para una propagación de 200 longitudes de onda (De Basabe et al., 2008)

Orden	SEM	SIPG	IIPG	NIPG
1	0.709	0.408	0.408	0.353
2	0.288	0.182	0.166	0.152
3	0.164	0.108	0.0934	0.0831
4	0.104	0.0725	0.0600	0.0522
5	0.0714	0.0520	0.0419	0.0359
6	0.0516	0.0391	0.0309	0.0262
7	0.0390	0.0305	0.0238	0.0200
8	0.0304	0.0244	0.0188	0.0157
9	0.0244	0.0200	0.0153	0.0127
10	0.0200	0.0167	0.0126	0.0105

Tabla 1. Constantes para las condiciones de estabilidad en el caso acústico para SEM y las tres versiones de DGM en función del tamaño de los elementos h . Las constantes para SIPG, IIPG y NIPG son para las bases tipo GLL (De Basabe y Sen, 2010)

Orden	SEM	SIPG	IIPG	NIPG
1	0.816	0.288	0.287	0.272
2	0.333	0.121	0.117	0.113
3	0.189	0.0683	0.0650	0.0622
4	0.120	0.0439	0.0413	0.0392
5	0.0823	0.0306	0.0286	0.0270
6	0.0595	0.0226	0.0210	0.0197
7	0.0449	0.0173	0.0161	0.0150
8	0.0350	0.0137	0.0127	0.0118
9	0.0281	0.0111	0.0103	0.00960
10	0.0230	0.00926	0.00852	0.00792

Tabla 3. Constantes para las condiciones de estabilidad en el caso elástico para SEM y las tres versiones de DGM en función del tamaño de los elementos h utilizando $\alpha/\beta = 1.4$. Las constantes para SIPG, IIPG y NIPG son para las bases tipo GLL (De Basabe y Sen, 2010)

Orden	SEM	SIPG	IIPG	NIPG
1	0.709	0.408	0.408	0.353
2	0.577	0.365	0.333	0.305
3	0.593	0.393	0.338	0.301
4	0.604	0.420	0.347	0.302
5	0.608	0.443	0.357	0.306
6	0.608	0.461	0.364	0.309
7	0.608	0.476	0.371	0.312
8	0.607	0.488	0.376	0.314
9	0.607	0.498	0.381	0.316
10	0.607	0.506	0.384	0.318

Tabla 2. Constantes para las condiciones de estabilidad en el caso acústico para SEM y las tres versiones de DGM en función del incremento mínimo Δx . Las constantes para SIPG, IIPG y NIPG son para las bases tipo GLL (De Basabe y Sen, 2010)

Orden	SEM	SIPG	IIPG	NIPG
1	0.816	0.288	0.287	0.272
2	0.666	0.243	0.235	0.226
3	0.684	0.247	0.235	0.225
4	0.697	0.254	0.239	0.227
5	0.700	0.261	0.244	0.230
6	0.700	0.266	0.247	0.232
7	0.700	0.271	0.251	0.235
8	0.699	0.274	0.253	0.236
9	0.698	0.278	0.256	0.238
10	0.698	0.280	0.258	0.240

Tabla 4. Constantes para las condiciones de estabilidad en el caso elástico para SEM y las tres versiones de DGM en función del tamaño del incremento mínimo Δx utilizando $\alpha/\beta = 1.4$. Las constantes para SIPG, IIPG y NIPG son para las bases tipo GLL. (De Basabe y Sen, 2010)

Por su parte, la dispersión numérica de DGM en el caso acústico ha sido estudiada por Hu et al. (1999), Stanescu et al. (2000), Ainsworth (2004b) y Ainsworth et al., (2006), y el caso elástico ha sido estudiado por De Basabe et al. (2008). Las principales conclusiones son que los métodos de orden 1 y 2 tienen menor dispersión numérica que los de SEM y que los de orden superior tienen las mismas ventajas que los de SEM en cuanto a la superconvergencia y anisotropía numérica si se escogen cuidadosamente los parámetros y tipos de bases. La figura 3 muestra la convergencia del error de la dispersión para la versión SIPG de DGM y los nodos de GLL. Comparando esta figura con la figura 1 se observa que el orden de convergencia de este método es igual al de SEM. Las otras versiones de DGM tienen una convergencia más lenta con respecto a la dispersión numérica. La figura 4 muestran la anisotropía numérica de SIPG utilizando los mismos parámetros que en la figura 2 y los nodos de GLL. En esta figura se observa que los métodos de orden 3 y 4 no tienen anisotropía numérica y que la anisotropía del método de segundo orden es menor que la de SEM de segundo orden (comparar con la figura 2). La estabilidad de DGM en los casos acústico y elástico ha sido estudiada por De Basabe y Sen (2010), y los resultados se muestran en las tablas 1 al 4. Al comparar las condiciones de estabilidad de las tres versiones de DGM, se observa que la versión simétrica (SIPG) tiene un rango de estabilidad más amplio que NIPG y IIPG. Sin embargo, al contrastar con las condiciones de SEM, se observa que son casi 20% más restrictivas en el caso acústico y más de 60% más restrictivas en el caso elástico.

Sismogramas Sintéticos

En esta sección, comparamos los resultados numéricos de SEM y DGM para el problema de Lamb (Lamb, 1904), utilizando un semiespacio isotrópico homogéneo con velocidades de ondas P y S, y densidad dadas por 3 km/s, 1.73 km/s y 2.5 g/cm (ver figura 5). La superficie libre está ubicada en $z=0$. La fuente sísmica tiene un componente vertical ubicada en el punto (0, 0.05 km), con una ondícula de Ricker centrada en 0.08 s con frecuencia central de 17.3 Hz. La solución exacta de este problema se puede obtener utilizando el método de Cagniard-De Hoop (Aki y Richards, 2006, capítulo 6). Para calcular la solución analítica de este problema, utilizamos el código de Fortran disponible en la página de internet del proyecto SPICE.¹

En las figuras 6 y 7 se muestran los sismogramas sintéticos para una estación ubicada en la superficie, en el punto (1 km, 0), para SEM y DGM de orden 1, 2, 4 y 8. En las discretizaciones de diferentes órdenes se utilizaron consistentemente 10 nodos por longitud de onda para la frecuencia central de la onda S. En estas figuras, se puede observar que los métodos de orden 1 introducen un poco de dispersión numérica, la cual se manifiesta principalmente como oscilaciones espurias después del arribo de la onda S. Al observar los errores en la amplitud y la fase es posible apreciar como estos errores disminuyen rápidamente al incrementar el orden polinomial; en particular, las aproximaciones de orden 8 son casi indistinguibles de la solución exacta. Para comparar los métodos de orden superior, en la figura 8 se muestran

¹ Seismic wave Propagation and Imaging in Complex media: an European network (SPICE)
<http://www.spice-rtn.org/library/software/EXDDIR>

los sismogramas obtenidos con SEM y DGM de orden 4 y 8. En esta figura, se muestra únicamente el arribo de la onda S, que es donde se observan los errores más claramente. En esta escala es posible apreciar que hay pequeños errores en la amplitud y la fase, en particular para las aproximaciones de SEM. Aunque

aparentemente los resultados de DGM son más exactos, esto se debe en parte a que se utilizaron incrementos en tiempo más pequeños debido a que las condiciones de estabilidad son más restrictivas. Dicho de otra manera, los errores observados se atribuyen principalmente a la discretización en el tiempo.

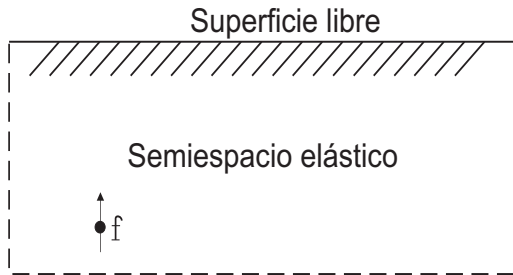


Figura 5. Geometría del problema de Lamb. Este problema consiste en un semiespacio elástico con una superficie libre y una fuente puntual. Las líneas discontinuas representan los bordes artificiales introducidos al truncar el dominio para las simulaciones.

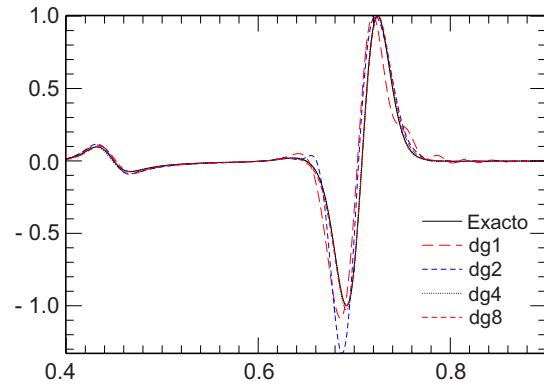


Figura 7. Sismogramas sintéticos para el problema de Lamb utilizando DGM de orden 1, 2, 4 y 8. El tamaño de los elementos para la discretización en el espacio fue seleccionado para obtener 10 nodos para la longitud de la onda S de la frecuencia central, y los incrementos en el tiempo utilizados son los máximos permitidos por las condiciones de estabilidad.

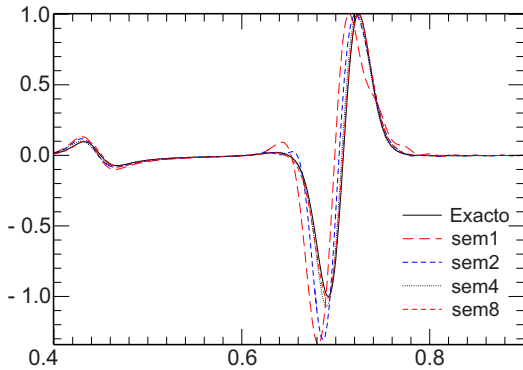


Figura 6. Sismogramas sintéticos para el problema de Lamb utilizando SEM de orden 1, 2, 4 y 8. El tamaño de los elementos para la discretización en el espacio fue seleccionado para obtener 10 nodos para la longitud de la onda S de la frecuencia central, y los incrementos en el tiempo utilizados son los máximos permitidos por las condiciones de estabilidad.

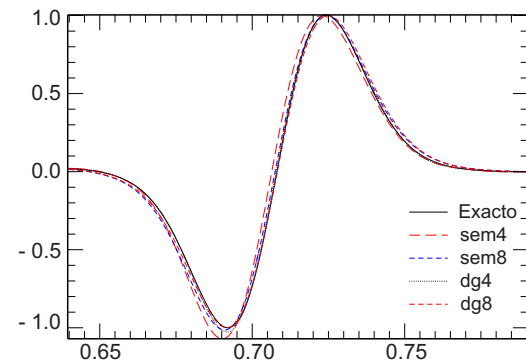


Figura 8. Comparación de los sismogramas de orden 4 y 8 utilizando SEM y DGM.

CONCLUSIONES

En este artículo hemos descrito brevemente dos métodos que se derivan del de elementos finitos y que ofrecen ventajas para simulaciones en sismología. Estos métodos son el de elementos espectrales y el de Galerkin discontinuo. Para enfatizar sus ventajas, hemos presentado los principales resultados del análisis de dispersión y estabilidad numérica, así como su aplicación para el problema de Lamb. A continuación se presentan algunas conclusiones:

- Los métodos de primer orden requieren un número elevado de nodos por longitud de onda debido a su dispersión y anisotropía numérica, y son más sensibles a la razón entre las velocidades de las ondas P y S.

- La dispersión y anisotropía numérica de los métodos de orden 4 ó superior es mínima, utilizando al menos 4 nodos por longitud de onda.

- Al comparar las tres versiones de IP-DGM, la simétrica (SIPG) tiene mejores propiedades en cuanto a dispersión y estabilidad, en particular si se utilizan los nodos de Gauss o de GLL para construir las funciones base.

- Comparando SEM con IP-DGM, los dos métodos ofrecen ventajas similares en cuanto a dispersión y anisotropía numérica, pero IP-DGM tiene la desventaja de que sus condiciones de estabilidad son más restrictivas. Sin embargo, IP-DGM ofrece ventajas sobre SEM que no se discutieron en este artículo, como la posibilidad de utilizar otros tipos de elementos y bases, y de utilizar mallas más generales (e.g. Sun y Wheeler, 2005; Käser y Dumsler, 2006).

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al CONACYT por la beca otorgada durante mi estancia en la Universidad de Texas, Austin, así como por el apoyo por repatriación. Así mismo, a Antonio González por su revisión experta que mejoró este manuscrito, y a un revisor anónimo por sus observaciones.

REFERENCIAS

- Ainsworth, M., 2004a. Discrete dispersion relation for hp-version finite element approximation at high wave number, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **42**(2), 553-575.
- Ainsworth, M., 2004b. Dispersive and dissipative behaviour of high order discontinuous Galerkin finite element methods, *Journal of Computational Physics*, **198**(1), 106-130.
- Ainsworth, M., Monk, P., and Muniz, W., 2006. Dispersive and dissipative properties of discontinuous Galerkin finite element methods for the second-order wave equation, *Journal of Scientific Computing*, **27**(1), 5-40.
- Aki, K. and Richards, P., 2002. *Quantitative Seismology*, University Science Books, Sausalito, California, 2nd ed.
- Alford, R., Kelly, K., and Boore, D., 1974. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation, *Geophysics*, **39**(6), 834-842.

- Alterman, Z. and Karal, F., 1968. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **58**(1), 367-398.
- Bao, H., Bielak, J., Ghattas, O., Kallivokas, L., O'Hallaron, D., Shewchuk, J., and Xu, J., 1998. Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **152**(1-2), 85-102.
- Carcione, J., Herman, G., and Ten Kroode, A., 2002. Seismic modeling, *Geophysics*, **67**(4), 1304-1325.
- Cerveny, V., 2001. *Seismic ray theory*, Cambridge Univ Press.
- Chaljub, E., Komatitsch, D., Vilotte, J.-P., Capdeville, Y., Valette, B., and Festa, G., 2007. Spectral element analysis in seismology, in *Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Media*, Advances in Geophysics, pp. 365-419, eds Wu, R.-S. & Maupin, V., Elsevier.
- Chopra, A. K., Dibaj, M., Clough, R. W., Penzien, J., and Seed, H. B., 1969. Earthquake analysis of earth dams, *4th World Conf. Earthquake Engineering*, pp. A5-55.
- Cockburn, B. and Shu, C., 1989. TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws II: General Framework, *Mathematics of Computation*, **52**(186), 411-435.
- Cockburn, B. and Shu, C.-W., 1998. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *Journal of Computational Physics*, **141**(2), 199-224.
- Cockburn, B., Lin, S., and Shu, C., 1989. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one-dimensional systems, *Journal of Computational Physics*, **84**(1), 90-113.
- Cockburn, B., Hou, S., and Shu, C.-W., 1990. The Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws. IV: The Multidimensional Case, *Mathematics of Computation*, **54**(190), 545-581.
- Cohen, G., 2002. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*, Scientific Computation, Springer-Verlag.
- Courant, R., Friedrichs, K., and Lewy, H., 1967. On the partial difference equations of mathematical physics, *IBM Journal of Research and Development*, **11**(2), 215-234.
- Darlow, B., 1980. *A Penalty-Galerkin Method for Solving the Miscible Displacement Problem*, Ph.D. thesis, Rice University, Houston, Texas.
- Dawson, C., Sun, S., and Wheeler, M. F., 2004. Compatible algorithms for coupled flow and transport, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**(23-26), 2565-2580.

- De Basabe, J. D. and Sen, M. K., 2007. Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations, *Geophysics*, **72**(6), T81-T95.
- De Basabe, J. D. and Sen, M. K., 2010. Stability of the high-order finite elements for acoustic or elastic wave propagation with high-order time stepping, *Geophysical Journal International*, **181**(1), 577-590.
- De Basabe, J. D., Sen, M. K., and Wheeler, M. F., 2008. The interior penalty discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation: Grid dispersion, *Geophysical Journal International*, **175**(1), 83-93.
- de la Puente, J., Käser, M., Dumbser, M., and Igel, H., 2007. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes -- IV. Anisotropy, *Geophysical Journal International*, **169**(3), 1210-1228.
- Dormy, E. and Tarantola, A., 1995. Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method, *Journal of Geophysical Research*, **100**(B2), 2123-2134.
- Dumbser, M. and Käser, M., 2006. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes -- II. The three-dimensional isotropic case, *Geophysical Journal International*, **167**(1), 319-336.
- Dumbser, M. and Munz, C.-D., 2006. Building Blocks for Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Schemes, *Journal of Scientific Computing*, **27**(1-3), 215-230.
- Dumbser, M., Käser, M., and de la Puente, J., 2007a. Arbitrary high-order finite volume schemes for seismic wave propagation on unstructured meshes in 2D and 3D, *Geophysical Journal International*, **171**(2), 665-694.
- Dumbser, M., Käser, M., and Toro, E., 2007b. An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes -- V. Local time stepping and p-adaptivity, *Geophysical Journal International*, **171**(2), 695-717.
- Fornberg, B., 1987. The pseudospectral method: Comparisons with finite differences for the elastic wave equation, *Geophysics*, **52**(4), 483-501.
- Grote, M., Schneebeli, A., and Schotzau, D., 2006. Discontinuous Galerkin Finite Element Method for the Wave Equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **44**(6), 2408-2431.
- Hu, F., Hussaini, M., and Rasitarinera, P., 1999. An analysis of the discontinuous Galerkin method for wave propagation problems, *Journal of Computational Physics*, **151**(2), 921-946.

- Käser, M. and Dumbser, M., 2006. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes -- I. The two-dimensional isotropic case with external source terms, *Geophysical Journal International*, **166**(2), 855-877.
- Käser, M., Dumbser, M., de la Puente, J., and Igel, H., 2007a. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes-III. Viscoelastic attenuation, *Geophysical Journal International*, **168**(1), 224-242.
- Käser, M., Mai, P., and Dumbser, M., 2007b. Accurate Calculation of Fault-Rupture Models Using the High-Order Discontinuous Galerkin Method on Tetrahedral Meshes, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **97**(5), 1570-1586.
- Kelly, K., Ward, R., Treitel, S., and Alford, R., 1976. Synthetic seismograms -A finite-difference approach, *Geophysics*, **41**(1), 2-27.
- Komatitsch, D. and Tromp, J., 1999. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation, *Geophysical Journal International*, **139**(3), 806-822.
- Komatitsch, D. and Tromp, J., 2002a. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-I. Validation, *Geophysical Journal International*, **149**(2), 390-412.
- Komatitsch, D. and Tromp, J., 2002b. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-II. Three-dimensional models, oceans, rotation and self-gravitation, *Geophysical Journal International*, **150**(1), 303-318.
- Komatitsch, D. and Vilotte, J., 1998. The spectral-element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **88**(2), 368-392.
- Komatitsch, D., Ritsema, J., and Tromp, J., 2002. The spectral-element method, Beowulf computing, and global seismology, *Science*, **298** (5599), 1737-1742.
- Komatitsch, D., Liu, Q., Tromp, J., Süß, P., Stidham, C., and Shaw, J., 2004. Simulations of Ground Motion in the Los Angeles Basin Based upon the Spectral-Element Method, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **94**(1), 187-206.
- Komatitsch, D., Tsuboi, S., and Tromp, J., 2005. The spectral-element method in seismology, *Geophysical Monograph*, **157**, 205-227.
- Kosloff, D. and Baysal, E., 1982. Forward modeling by a Fourier method, *Geophysics*, **47**(10), 1402-1412.
- Lamb, H., 1904. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **203**, 1-42.

- Lax, P. D. and Wendroff, B., 1964. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **17**(3), 381-398.
- Levander, A., 1988. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms, *Geophysics*, **53**, 1425.
- Lysmer, J. and Drake, L., 1972. A finite element method for seismology, in *Methods in Computational Physics*, vol. 11, pp. 181-216, Academic Press.
- Madariaga, R., 1976. Dynamics of an expanding circular fault, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**(3), 639-666.
- Madec, R., Komatitsch, D., and Diaz, J., 2009. Energy-conserving local time stepping based on high-order finite elements for seismic wave propagation across a fluid-solid interface, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **49**(2), 163-189.
- Madrid, J., 2008. A geometrical approach to time evolving wave fronts, *Geophysical Journal International*, **172**(3), 1117-1122.
- Marfurt, K. J., 1984. Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations, *Geophysics*, **49**(5), 533-549.
- Marfurt, K. J., 1990. Analysis of higher order finite element methods, in *Numerical modeling of seismic wave propagation*, vol. 13, pp. 516-520, ed. Marfurt, K. J., Soc. of Expl. Geophys.
- Moczo, P., Kristek, J., and Halada, L., 2000. 3D fourth-order staggered-grid finite-difference schemes: stability and grid dispersion, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **90**(3), 587-603.
- Mulder, W. A., 1999. Spurious modes in finite-element discretizations of the wave equation may not be all that bad, *Applied Numerical Mathematics*, **30**(4), 425-445.
- Mullen, R. and Belytschko, T., 1982. Dispersion analysis of finite element semidiscretizations of the two-dimensional wave equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **18**(1), 11-29.
- Patera, A. T., 1984. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion, *Journal of Computational Physics*, **54**(3), 468-488.
- Priolo, E., 2001. Earthquake Ground Motion Simulation Through the 2-D Spectral Element Method, *Journal of Computational Acoustics*, **9**(4), 1561-1581.
- Reed, W. and Hill, T., 1973. Triangular mesh methods for the neutron transport equation, *Los Alamos Scientific Laboratory Technical Report*, **LA-UR-73-479**.
- Rivière, B. and Wheeler, M. F., 2001. Discontinuous finite element methods for acoustic and elastic wave problems. part I: Semidiscrete error estimates, *TICAM report*, **0**(01-02), 1-12.

- Rivière, B., Wheeler, M., and Girault, V., 1999. Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. Part I, *Computational Geosciences*, **3**(3), 337-360.
- Rivière, B., Wheeler, M. F., and Girault, V., 2001. A Priori Error Estimates for Finite Element Methods Based on Discontinuous Approximation Spaces for Elliptic Problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**(3), 902-931.
- Seriani, G. and Priolo, E., 1994. Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media, *Finite Elements in Analysis and Design*, **16**(3-4), 337-348.
- Smith, W. D., 1975. The application of finite element analysis of body wave propagation problems, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **42**(2), 747 -768.
- Stanescu, D., Kopriva, D., and Hussaini, M., 2000. Dispersion Analysis for Discontinuous Spectral Element Methods, *Journal of Scientific Computing*, **15**(2), 149-171.
- Sun, S. and Wheeler, M., 2005. Discontinuous Galerkin methods for coupled flow and reactive transport problems, *Applied Numerical Mathematics*, **52**(2-3), 273-298.
- Tordjman, N., 1995. *Eléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*, Ph.D. thesis, Université de Paris, IX-Dauphine.
- Tordjman, N., Cohen, G., and Joly, P., 1994. Eléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes en dimension 1, Rapport de Recherche 2323, INRIA, Le Chesnay, France.
- Virieux, J., 1984. SH wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **49**(11), 1933-1957.
- Virieux, J., 1986. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **51**(4), 889-901.

Manuscrito recibido: 31 de mayo, 2011.

Recepción del manuscrito corregido: 29 de septiembre, 2011.

Manuscrito aceptado: 10 de diciembre, 2011.